

Exercice 1 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que (dans la suite $k \in \mathbf{Z}$) :

a. $\arg z = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

b. $\arg z = \pi + 2k\pi$

c. $\arg(z + 2i) = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

d. $\arg(z - 1) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Exercice 2 :

Soient 3 nombres complexes z_1, z_2 et z_3 définis par : $z_1 = \frac{\sqrt{3} + i}{4}$

$$z_2 = z_1 - i \text{ et } z_3 = \overline{z_1} - i$$

On appelle M_1, M_2 et M_3 les images respectives de z_1, z_2 et z_3 dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) (Nous prendrons comme unité graphique 4 cm).

- a. Déterminer la forme algébrique de z_2 et de z_3 .

b. Calculer $|z_3 - z_1|$ et $|z_3 - z_2| + |z_2 - z_1|$. Que peut-on en déduire pour les points M_1, M_2 et M_3 ?
- a. Déterminer un module et un argument de z_1 et de z_2 .

b. Déterminer le module de $z_2 - z_1$.

c. Montrer que le triangle M_1OM_2 est rectangle.

Exercice 3 :

1. M et M' sont deux points du plan complexe f'affixes respectives z et z'.

Donner une interprétation géométrique de $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)$ et de $\arg(z - z')$.

2. On donne 4 points A, B, C et D par leurs affixes : $z_A = -1 + 2i$;
 $z_B = 4 + 3i$; $z_C = 3i$ et $z_D = 4 - 3i$.

a. Calculer le module et l'argument de $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}$ et de $\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B}$

b. Quelle est la nature des triangles ACD et BCD ?

c. Démontrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

3. A, B et C sont trois points deux à deux distincts du plan complexe

d'affixes respectives z_A, z_B et z_C . A quelle condition sur $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ a-t-on :

- ABC est un triangle isocèle en A
- ABC est un triangle rectangle en A
- ABC est un triangle rectangle et isocèle en A
- ABC est un triangle équilatéral
- Les points A, B et C sont alignés.

4. A tout nombre complexe z on associe le nombre complexe z' tel que $z' = iz$. Appelons M le point d'affixe z et M' le point d'affixe z' . M' est l'image de M par la transformation géométrique T . Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de T .

Exercice 4 :

Les points A, B, M et M' sont définis par leurs affixes : $z_A = -3$

$z_B = 1 + i$ $z_M = z$ et $z_{M'} = z'$

On sait que $z' = \frac{z + 3}{z - 1 - i}$ Déterminer l'ensemble des points M tels que :

- a. $OM' = 1$
- b. M' est sur l'axe des réels
- c. M' est sur l'axe des imaginaires purs
- d. z' est un réel négatif

Exercice 5 (Bac Polynésie 2000) :

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , d'unité graphique 4 cm.

Dans l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} , i désigne le nombre de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$

On appelle f l'application, qui, à tout nombre complexe z différent de

$-2i$ associe : $Z = f(z) = \frac{z - 2 + i}{z + 2i}$

Calculer $f(2i)$ puis résoudre l'équation $f(z) = i$.

1. Si $z = x + iy$, x et y étant deux réels, exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et de y .

On vérifiera que $\text{Re}(Z) = \frac{x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2}{x^2 + (y + 2)^2}$.

En déduire la nature de :

- a. L'ensemble E des points M d'affixe z , tels que Z soit un réel.
- b. L'ensemble F des points M d'affixe z du plan tels que Z soit un imaginaire pur éventuellement nul.
- c. Représenter ces 2 ensembles.

2. On appelle A et B les points d'affixes respectives $z_A = 2 - i$ et

$z_B = -2i$. En remarquant que $Z = \frac{z - z_A}{z - z_B}$ retrouver les ensembles E et F

par une méthode géométrique.

3. Calculer $|f(z) - 1| \times |z + 2i|$, et déduire que les points M' d'affixe Z , lorsque le point M d'affixe z parcourt le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{5}$, sont tous sur un même cercle dont on précisera le rayon et l'affixe du centre.