

Contrôle 5

L'usage de la calculatrice est autorisé. (durée : 2 heures). La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 : 8 points

Un gardien de but doit faire face, lors d'une démonstration, à un certain nombre de tirs directs. Les expériences précédentes conduisent à penser que :

- s'il a arrêté le n -ième tir, la probabilité pour qu'il arrête le suivant (c'est-à-dire le $(n + 1)$ -ième) est 0,8 ;
- s'il a laissé passer le n -ième tir, la probabilité pour qu'il arrête le suivant est 0,6 ;
- la probabilité pour qu'il arrête le 1^{er} tir est 0,7.

Dans tout l'exercice, si E est un événement, on note $p(E)$ la probabilité de E , \overline{E} l'événement contraire de E .

On note $p_F(E)$ la probabilité de l'événement E sachant que F est réalisé.

A_n est l'événement « Le gardien de but arrête le n -ième tir. »

On a donc $p(A_1) = 0,7$.

1. a. Donner, pour $n \geq 1$, les valeurs de $p_{A_n}(A_{n+1})$ et de $p_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$.

b. Exprimer $p(A_{n+1} \cap A_n)$ et $p(A_{n+1} \cap \overline{A_n})$ en fonction de $p(A_n)$.

c. En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $p(A_{n+1}) = 0,2 p(A_n) + 0,6$.

2. On pose, à présent, pour tout $n \geq 1$, $p_n = p(A_n)$ et $u_n = p_n - 0,75$.

a. Démontrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique de raison 0,2.

b. En déduire une expression de p_n en fonction de n .

c. Montrer que la suite $(p_n)_{n \geq 1}$ admet une limite que l'on calculera.

Exercice 2 (Bac S, Nouvelle Calédonie, novembre 2006) : 10 points

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right)$

1. a. Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$

Étudier le sens de variation de f , et tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. (On prendra comme unité 2 cm).

b. Utiliser le graphique précédent pour construire les points A_0, A_1, A_2 et A_3 de l'axe $(O ; \vec{i})$ d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3 .

2. a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul $u_n \geq \sqrt{2}$.

b. Montrer que pour tout $x \geq \sqrt{2}$, $f(x) \leq x$.

c. En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

d. Prouver qu'elle converge.

3. Soit ℓ la limite de la suite (u_n) . Montrer que ℓ est solution de l'équation $x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$

En déduire sa valeur.

Exercice 3 (Extrait Bac S, Asie juin 2006) : 2 points

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = e^{-x}$.

1. Démontrer que la fonction u définie sur l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels par $u(x) = xe^{-x}$ est une solution de (E).

2. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' + y = 0$.

Ce qui suit est hors-barème (bonus de 3 points possible) :

3. Démontrer qu'une fonction v , définie et dérivable sur \mathbb{R} , est solution de (E) si et seulement si $v - u$ est une solution de (E_0) .

4. En déduire toutes les solutions de (E).

5. Déterminer la fonction f_2 , solution de (E), qui prend la valeur 2 en 0.

