n° 101 p. 112 :

1. a) D'après (1) : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(f(x))^2 = 1 + (g(x))^2$.
Un carré est toujours positif donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $(g(x))^2 \geq 0$ et $1 + (g(x))^2 \geq 1$ d'où $(f x))^2 \geq 0$.
Nous avons $(f(x))^2 \neq 0$ et donc $f(x) \neq 0$.

b) (1) est vrai pour tout x et en particulier pour x = 0. Nous avons : $(f(0))^2 - (g(0))^2 = 1$. Comme $f(0) = 1$ nous obtenons : $1 - (g(0))^2 = 1$ et $(g(0))^2 = 0$. Donc $g(0) = 0$.

2. En dérivant (1), nous obtenons : $2 f'(x) f(x) - 2 g'(x) g(x) = 0$ puis $f'(x) f(x) - g'(x) g(x) = 0$.
Or $f(x) = g'(x)$ donc $f'(x) f(x) - f(x) g(x) = 0$ et $f(x) [f'(x) - g(x)] = 0$.
Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$, nous avons $f'(x) - g(x) = 0$ ce qui nous donne $g(x) = f'(x)$.

3. a) $u(0) = f(0) + g(0) = 1 + 0 = 1$ $\quad$ $v(0) = f(0) - g(0) = 1 - 0 = 1$

b) $u' = f' + g' = g + f$ car $f' = g$ et $g' = f$ donc $u' = u$
De même, $v' = f' - g' = g - f = -(f - g) = -v$.

c) Nous savons que u est solution de $\begin{cases} u' = u \\ u(0) = 1 \end{cases}$ Nous reconnaissons l'équation différentielle étudiée en cours, dont l'unique solution est la fonction exponentielle. Donc $u(x) = e^x$.
$v' = -v$ donc $v(x) = C e^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$. Il faut déterminer la constante C. Pour cela, nous utilisons la condition initiale : $v(0) = 1$. Donc $v(0) = C e^0 = C = 1$.
Nous en déduisons que $v(x) = e^{-x}$.

4. Nous savons que $\begin{cases} u = f + g \\ v = f - g \end{cases}$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} f(x) + g(x) = e^x \\ f(x) - g(x) = e^{-x} \end{cases}$

Par addition nous obtenons : $2 f(x) = e^x + e^{-x}$ et $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

Par soustraction, nous obtenons : $2 g(x) = e^x - e^{-x}$ et $g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$