

Correction de la démonstration par récurrence de la propriété :

$$\text{pour } n \geq 1 : 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

1^{ère} étape : Pour $n = 1$, on a : $\left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 = \left(\frac{2}{2} \right)^2 = 1$ et $1^3 = 1$ donc la propriété est vérifiée pour

$n = 1$.

2^{ème} étape :

Je suppose qu'il existe un entier $p \geq 1$, tel que $1^3 + 2^3 + \dots + p^3 = \left[\frac{p(p+1)}{2} \right]^2$.

Je dois montrer que la propriété est alors vraie au rang $p + 1$ c'est-à-dire que :

$$1^3 + 2^3 + \dots + (p+1)^3 = \left[\frac{(p+1)(p+2)}{2} \right]^2$$

Partons de $1^3 + 2^3 + \dots + (p+1)^3$

$$\text{Nous avons } 1^3 + 2^3 + \dots + (p+1)^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + p^3 + (p+1)^3 = \left[\frac{p(p+1)}{2} \right]^2 + (p+1)^3$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{p(p+1)}{2} \right]^2 + (p+1)^3 &= \left[\frac{p^2+p}{2} \right]^2 + p^3 + 3p^2 + 3p + 1 = \frac{p^4 + 2p^3 + p^2}{4} + \frac{4p^3 + 12p^2 + 12p + 4}{4} \\ &= \frac{p^4 + 6p^3 + 13p^2 + 12p + 4}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'autre part : } \left[\frac{(p+1)(p+2)}{2} \right]^2 &= \frac{(p+1)^2 (p+2)^2}{4} = \frac{(p^2 + 2p + 1)(p^2 + 4p + 4)}{4} \\ &= \frac{p^4 + 4p^3 + 4p^2 + 2p^3 + 8p^2 + 8p + p^2 + 4p + 4}{4} = \frac{p^4 + 6p^3 + 13p^2 + 12p + 4}{4} \end{aligned}$$

Les deux résultats sont identiques donc $1^3 + 2^3 + \dots + (p+1)^3 = \left[\frac{(p+1)(p+2)}{2} \right]^2$

3^{ème} étape : Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$