Contrôle 7

L'usage de la calculatrice est autorisé. (durée : 2 heures). La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (Extrait Polynésie juin 2001) : 12 points

Dans tout le texte e désigne le nombre réel qui vérifie ln e = 1.

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln x + xe}{x^2}$

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = -2\ln x - xe + 1$.

1. Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

2. Étudier le sens de variation de g.

3. Montrer que dans $[0{,}5\,;1]$ l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule notée α.
Déterminer un encadrement de α à 0,1 près.

4. En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. Soit f' la fonction dérivée de f. Vérifier que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$ puis étudier le sens de variation de f sur $]0\,;+\infty[$.

3. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1+\alpha e}{2\alpha^2}$

4. Donner le tableau de variations de f.

Exercice 2 : 3 points

Démontrer que la droite d'équation $4x + 10y = 29$ est tangente au cercle d'équation $x^2 + y^2 = \dfrac{29}{4}$.

Quelles sont les coordonnées du point de contact ?

Exercice 3 (Extrait centres étrangers, juin 2003) : 5 points

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $I =]-2\,;+\infty[$ par $f(x) = 1 + x\ln(x+2)$.

1. Étude des variations de la dérivée f'.

a. f' désigne la fonction dérivée première de f et f'' la fonction dérivée seconde.
Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]-2\,;+\infty[$.

b. Étudier les variations de f' sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$.

c. Déterminer les limites de f' en -2 et en $+\infty$.

2. Étude du signe de $f'(x)$.

a. Montrer que sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$ l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $[-0{,}6\,;-0{,}5]$.

b. En déduire le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.

Question hors barème (1 point de bonus possible) :

3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$.